**Chuyªn ®Ò**

**Chøng minh nguyªn tè cïng nhau**

1. ***Phương pháp:***

 Thông thường để chứng minh hai số nguyên tố cùng nhau, ta thuờng dùng hai phương pháp sau:

1. **Phương pháp 1**: Đặt ƯCLN của chúng là d => mỗi số đều chia hết cho d, sau đó ta tìm cách chứng minh d = 1.

**Ví dụ**: Chứng minh hai số lẻ liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau

Giải: Gọi hai số lẻ liªn tiếp là 2n + 1 và 2n + 3 (n  N). Ta đặt (2n + 1, 2n + 3) = d.

Suy ra 2n + 1  d; 2n + 3  d. Vậy (2n + 3) – ( 2n + 1)  d hay 2  d, suy ra d  { 1 ; 2 }. Nhưng d  2 vì d là ước của các số lẻ. Vậy d = 1, điều đó chứng tỏ 2n + 1 và 2n + 3 là hai số nguyên tố cùng nhau.

1. **Phương pháp 2**: Ta dïng phương pháp phản chứng

 Giả sử điều cần chứng minh là sai, Từ đó ta tìm cách suy ra mâu thuẩn với giả thiết phản chứng huặc mâu thuẩn với một chân lý có trước.

**Ví dụ**: Cho (a, b) = 1. Chứng minh rằng ab và a + b nguyên tố cùng nhau.

Giải: Giả sử a + b và ab không nguyên tố cùng nhau . Do đó a + b và ab ắt phải có ít nhất một ước số chung nguyên tố d:

 a + b  d (1)

 ab  d (2)

Vì d là số nguyên tố nên từ (2), ta có:

 a  d  b  d

* Nếu a  d . Từ (1)  b  d

Như vậy a và b có một ước số chung nguyên tố d, trái với giả thiết.

* Nếu b  d . Từ (1)  a  d

Như vậy a và b có một ước số chung nguyên tố d, trái với giả thiết.

Vậy, (a,b) = 1 thì ab và a + b nguyên tố cùng nhau.

1. ***Bài tập***

**Bài 1**: chứng minh rằng hai số tự nhiên liªn tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

Giải: Gọi hai số tù nhiên liªn tiếp là n và n + 1(n  N ) .

Đặt (n, n + 1) = d  n d; n + 1  d. Do đó (n + 1) – n  d hay 1  d suy ra d = 1.

vậy n và n + 1 là hai số nguyên tố cùng nhau.

**Bài 2:** Cho a là số tự nhiên lẻ, b là một số tự nhiên . chứng minh rằng các số a và ab + 4 nguyên tố cùng nhau.

Giải: Giả sử a và ab + 4 cùng chia hết cho một số tự nhiên d( d  0 ).

Như vậy thì ab chia hết cho d, do đó hiệu (ab + 4) – ab = 4cũng chia hết cho d. Suy ra d có thể bằng 1, 2 hay 4. Nhưng a không chia hết cho 2 và 4 vì a lẻ. Vậy d chỉ bằng 1 nên các số a và ab+ 4 nguyên tố cùng nhau.

 **Bài 3**:Cho a, b nguyên tố cùng nhau. Chứng minh an  + bn  và ab nguyªn tè cïng nhau

Giải: Giả sử an  + bn  và ab không nguyên tố cùng nhau.

Ta suy ra an  + bn  và ab ắt phải cã một ước số chung nguyên tố d :

 an  + bn   d (1)

 ab  d (2)

V× ab  d, d nguyªn tè nªn ta cã:

a  d  b  d

* NÕu a  d

 an  d

 Ta l¹i cã an  + bn   d suy ra bn   d

V× bn   d, d nguyªn tè, nªn b  d

Nh­ vËy a vµ b sÏ cã mét ­íc sè chu ng nguyªn tè d, m©u thuÉn gi¶ thiÕt.

* NÕu b  d: T­¬ng tù

 VËy: an +bb = 1 và an  + bn  và ab nguyên tố cùng nhau.

1. ***Bµi tËp t­¬ng tù***
2. Cho a,b,c nguyªn tè cïng nhau. Chøng minh r»ng :

ab + bc + ca , a + b + c, abc nguyªn tè cïng nhau

1. Cho (a,b) = 1. Chøng minh 5a +3b vµ 13a + 8b nguyªn tè cïng nhau.
2. Cho a,b nguyªn tè cïng nhau. Chøng minh r»ng an  vµ b nguyªn tè cïng nhau
3. Chøng minh r»ng víi mäi n kh¸c 0 th× sè 3n + 1 vµ 4n + 1 nguyªn tè cïng nhau.